



Multi-stage stochastische modellering adresseert tekortkomingen van Markowitz' portfolio-optimalisatie

Het construeren van optimale portfolio's is een fundamenteel vraagstuk in de financiële wereld. Portfolio-optimalisatie richt zich op het bepalen van een kapitaalverdeling over financiële activa die de risico-rendementverhouding optimaliseert. Hiermee wordt gestreefd naar een risico-efficiënt portfolio: een verdeling waarbij, gegeven een bepaald risiconiveau, geen enkele andere combinatie van activa een hoger verwacht rendement oplevert. Een grote uitdaging bij bestaande methoden voor portfolio-optimalisatie is het effectief omgaan met de onvoorspelbaarheid en dynamiek van financiële markten. Deze factoren maken modellering complex en vereisen inventieve technieken. Om deze uitdaging te adresseren, heb ik in mijn scriptie een multi-stage stochastisch model voor portfolio-optimalisatie ontwikkeld. In dit artikel bespreek ik de belangrijkste bevindingen van mijn onderzoek.

L. Beute MSc is werkzaam als trainee bij TVM Verzekeringen en winnaar van de Johan de Witt prijs 2024.



HISTORISCHE CONTEXT

In 1952 introduceerde Harry Markowitz het mean-variance (MV) model; de basis voor het zogeheten portfolio selectieprobleem (PSP). In het PSP wordt getracht een portfolio te bepalen die risico-efficiënt is. Het MV-model probeert dit te bereiken door portfolio's te selecteren waarbij de verhoudingen tussen (co)variantie en verwacht rendement optimaal zijn.

Hoewel Markowitz' theorie baanbrekend was, is deze in de loop der tijd ook bekritiseerd. Een belangrijke kritiek is dat de versimpelde benadering in het MV-model de complexiteit van de financiële markten niet goed weergeeft. Hierdoor zou het model niet goed in staat zijn om praktische omstandigheden effectief te adresseren. Een voorbeeld hiervan is de aanname dat rendementen normaal verdeeld zijn; een veronderstelling die inmiddels meermaals is weerlegd en niet langer als valide wordt beschouwd. Bovendien beperkt het MV-model de integratie van praktische beperkingen, zoals minimale positiegroottes en limieten op het aantal unieke activa in een portfolio. Deze tekortkomingen kunnen leiden tot significante schattingsfouten in de rendementen van de portfolio's die met het MV-model geconstrueerd worden.

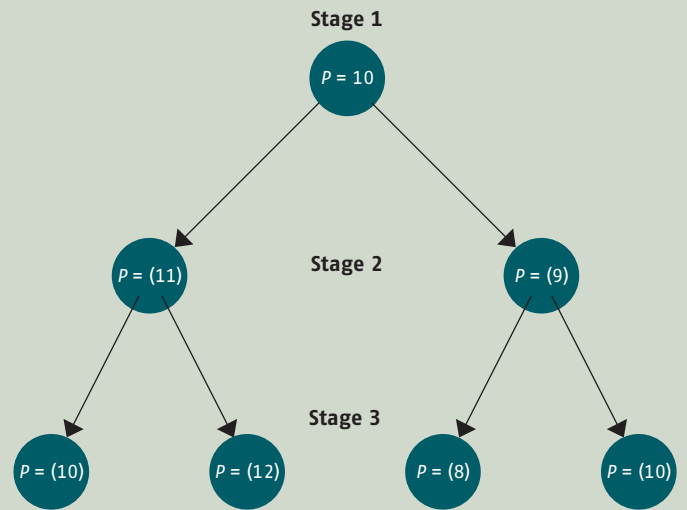
Vanwege deze beperkingen kan gesteld worden dat het MV-model suboptimaal is voor portfolio-optimalisatie. Moderne benaderingen, zoals robuuste optimalisatie en machine learning, bieden verfijningen. Een veelbelovende, maar nog relatief onbenutte methode voor het PSP is multi-stage stochastische modellering.

MULTI-STAGE STOCHASTISCHE MODELLERING

Multi-stage stochastische modellering is een methode waarbij besluitvorming plaatsvindt over meerdere tijdstappen, ook wel stages genoemd. In elke stage zijn er verschillende scenario's, ieder met mogelijke realisaties van een stochastisch proces. Het generieke doel van een multi-stage stochastisch model is het minimaliseren van de som van de initiële kosten en de verwachte toekomstige kosten die voortkomen uit de genomen besluiten, afhankelijk van de mogelijke realisaties van de stochast.

Onderliggend aan deze modellen ligt vaak een zogeheten scenario tree, die de verschillende stages en scenario's representeert. In mijn modellering van het PSP ga ik ervan uit dat de toekomstige prijs van financiële instrumenten de stochast is waarop de beslissingen worden gebaseerd. De afbeelding hierna biedt een visuele weergave van een kleine scenario tree in de context van het PSP. Hierin stelt P de stochast voor die de prijs van een arbitrair financieel instrument beschrijft. Stage 1 kan worden geïnterpreteerd als het huidige moment, waarbij de prijs bekend is. Stage 2 en stage 3 representeren momenten in de

toekomst. Tussen de haakjes wordt de mogelijke realisatie van de stochast P weergegeven in een specifiek prijsscenario van een bepaalde stage.



Aan de hand van deze scenario trees heb ik een model ontwikkeld dat een optimaal portfolio construeert. Dit portfolio minimaliseert de som van de risicomaatstaf Conditional Value at Risk (CVaR) in de eerste stage en de verwachte CVaR in de toekomstige stages. Tegelijkertijd wordt dit portfolio geselecteerd zodat een minimaal vereist verwacht rendement wordt behaald. Het resulterende model heeft de structuur van een multi-stage stochastisch model, waarbij in iedere stage de mogelijkheid bestaat om het portfolio te herbalanceren op basis van de gerealiseerde prijsscenario's. In mijn scriptie laat ik zien dat deze structuur de flexibiliteit biedt om praktische factoren toe te voegen aan de modellering, zoals het vereisen van minimale positiegroottes en limieten op het aantal unieke activa. Daarnaast biedt het model ruimte om de toekomstige prijzen en daarmee rendementen flexibel te modelleren. Op deze manier worden de eerdergenoemde tekortkomingen van het MV-model effectief geadresseerd.

COPULA'S: VERBETERING IN MODELLERING VAN RENDEMENTEN

Bij multi-stage stochastische modellering is de nauwkeurigheid van de modellering van de stochast van cruciaal belang. Binnen de context van het PSP vormt dit een uitdaging, aangezien financiële rendementen een complexe datastructuur kennen, waarbij ze – zoals eerder besproken – niet normaal verdeeld zijn en marginaal variëren. Voor deze structuur dient een multivariate kansverdeling te worden geschat.

Om deze uitdaging te overwinnen, heb ik een parametrische copula-methodiek ontwikkeld. In mijn scriptie toon ik aan dat deze methodiek in staat is om prijsscenario's van hoge kwaliteit te genereren. Copula's zijn verdelingsfuncties die de afhankelijkheden tussen meerdere variabelen kunnen modelleren, terwijl de marginale kansverdelingen van de variabelen afzonderlijk blijven. Dit maakt copula's bijzonder geschikt voor het modelleren van verdelingen van financiële rendementen, omdat ze de correlaties tussen variabelen vastleggen zonder de specifieke vorm van de marginaal verdeelde variabelen te beïnvloeden.

RESULTATEN

Om de prestaties van het multi-stage stochastische model te testen, heb ik een backtest-experiment uitgevoerd op basis van de Dow Jones Index (DJI); een van de belangrijkste aandelenindices in de Verenigde Staten. Met het multi-stage stochastische model heb ik portfolio's samengesteld uit DJI-assets en de rendementen vergeleken met de DJI zelf. De prijsscenario's die in het model zijn gebruikt voor deze assets, zijn gegenereerd volgens de parametrische copula-methodiek. De

periode die is gebruikt voor de schatting is 2010–2018; de prestaties zijn vergeleken met de resultaten van 2019. Om de robuustheid van het model te testen, heb ik gebruikgemaakt van verschillende minimale wekelijkse rendementseisen, variërend van 0,1% tot 0,4% per week—een bandbreedte die goed aansluit bij de historische wekelijkse rendementen van de DJI.

De tabel toont de resultaten van dit backtest-experiment. Een belangrijke observatie is dat, hoewel de gemiddelde gerealiseerde wekelijkse rendementen van alle portfolio's dicht bij elkaar liggen, de risicomaatstaven standaarddeviatie en CVaR aanzienlijk lager zijn voor de modelgebaseerde portfolio's.

	Multi-stage stochastische model portfolio's				DJI
Minimale wekelijkse rendementeis (input)	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	–
Gemiddeld wekelijk rendement	0,38%	0,39%	0,42%	0,44%	0,40%
Dagelijkse 95% CVaR	–1,48%	–1,47%	–1,53%	–1,83%	–1,97%
Dagelijkse standaard deviatie	0,65%	0,65%	0,66%	0,77%	0,79%

Deze observatie impliceert dat het model in staat is om portfolio's te genereren met een verbeterde risico-efficiëntie. In de praktijk kan een verbeterde risico-efficiëntie belangrijke implicaties hebben. Neem bijvoorbeeld een pensioenfonds: door de risico-efficiëntie van de beleggingsportfolio's verder te verbeteren, kan het risico op grote verliezen worden verkleind, terwijl de stabiliteit van de pensioenuitkeringen behouden blijft. Desgelijks kunnen banken hun kapitaal efficiënter inzetten en tegelijkertijd voldoen aan wet- en regelgeving

HOE NU VERDER?

Een belangrijk aspect dat in mijn scriptie uitgebreid wordt besproken, maar in dit artikel minder aan bod komt, is de complexiteit van multi-stage stochastische modellering. Dergelijke modellen groeien snel in omvang, wat ze computationeel intensief maakt. Bepaalde modelleringskeuzes kunnen bovendien leiden tot het gebruik van geheel tallige variabelen, zoals het geval is bij het multi-stage stochastische PSP-model dat ik in mijn scriptie ontwikkel. Dit verhoogt de computationele complexiteit verder.

Door de unieke structuur van dit type model binnen de context van het PSP, bestaan er momenteel geen standaard efficiënte oplossingsmethoden voor het verkrijgen van exacte oplossingen. Dit vereist een beperking van het aantal scenario's om tot oplossingen te komen. In mijn scriptie introduceer ik een algoritme dat deze bottleneck helpt te doorbreken, maar dit kan verder verfijnd worden. Tegelijkertijd kijk ik vooruit: met de toenemende computationele capaciteiten en nieuwe algoritmische ontwikkelingen kunnen in de toekomst verdere optimalisaties mogelijk zijn. Dit zou het model in staat stellen meer scenario's te verwerken, wat naar verwachting prestaties verder zal verbeteren. ■