

Portfolio allocation under market uncertainty: an application of multi-stage stochastic mixed-integer models

Lars Beute

Johan de Witt Prijs 2024
Supervisor: prof. dr. W. Romeijnders
University of Groningen

- Studie adresseert tekortkomingen in bestaande modellen voor het 'portfolio selectie probleem' (PSP).
- Multi-stage stochastisch mixed-integer model (SMIM) ontwikkeld om praktische marktomstandigheden en inherente onzekerheid adequaat te integreren in het PSP.
- Methodiek ontwikkeld om toekomstige stock return scenarios adequaat te modelleren o.b.v. parametrische copula's.
- Efficiënt algoritme ontwikkeld om modeloplossingen (portfolios) te genereren.
- Resultaten van gegenereerde portfolios laten significante verbetering in risico-efficiëntie zien t.o.v. benchmark index.

Introductie

Markowitz (1952) Mean-Variance (MV) Model voor PSP:

- Assumptie dat stock returns normaal zijn verdeeld.
- Gebruik van historische stock return data i.p.v. scenarios gecorrigeerd voor mogelijke toekomstige afwijkingen.
- Gebruik van covariantie als risk measure.

⇒ **Versimpelde weergave v.d. werkelijkheid, praktische risico's worden niet meegenomen.**

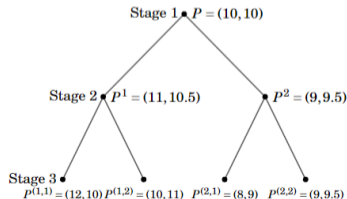
⇒ **Grote schattingsfouten in rendementen en covarianties.**

Tekortkomingen Adresseren

Tekortkomingen worden geadresseerd:

- Gebruik van Conditional Value at Risk (CVaR) als risk measure.
- Toekomstige stock returns modelleren als een scenario tree.
- Scenarios genereren d.m.v. een parametrische copula methode.
- Toevoegingen om praktijksituatie beter te benaderen:
 - Cardinaliteitsrestrictie (integer)
 - Minimale positie grootte
 - Mogelijkheid tot herbalancing

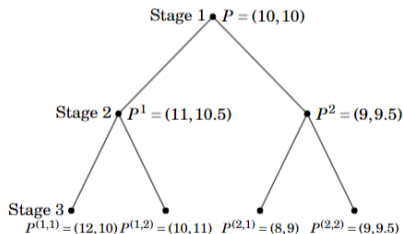
⇒ **Multi-stage stochastic mixed-integer model (SMIM).**



Multi-Stage SMIMs

- Stochastic Models (SMs) & Mixed-Integer Models (MIMs) → SMIMs.
- Stages: Momenten in tijd waarin nieuwe informatie bekend wordt.
- Doel: minimaliseer first-stage costs en de verwachte future-stage costs.

⇒ **Portfolio minimaliseert first-stage CVaR + verwachte future-stage CVaR gegeven gerealiseerde stock returns.**



Model

Algemeen kunnen we het PSP (pseudo) wiskundig beschrijven als:

min *Verwachte Portfolio Risico*

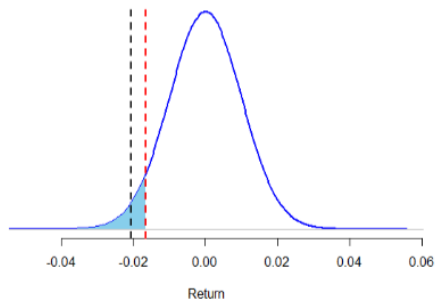
s.t. *Verwachte Portfolio Return* \geq *Minimale Verwachte Portfolio Return (fixed)*

Portfolio \in *Feasible Portfolios*.

Risico Functie

Als risico functie gebruiken we CVaR: **maatstaf voor het gemiddelde verlies dat optreedt bij overschrijding van een bepaald risiconiveau.**

- Focus ligt alleen op de loss-distribution.
- CVaR is coherent: diversificatie wordt beloond met lager risico.



Two-Stage Model (1)

Uitgaande van stocks $i = 1, \dots, S$ ontwikkelen we een two-stage model voor het construeren van een portfolio-vector ($\#stock\ 1, \dots, \#stock\ S$):

Objective

$$\min \text{first-stage CVaR} + \text{verwachte second-stage CVaR}$$

First-stage constraints

$$\text{s.t. Positie stock } i = \text{initiële aankoop stock } i$$

$$\text{Aantal unieke stocks} = K \text{ (fixed)}$$

$$\text{Cash (fixed)} = \sum_{i=1}^S \text{prijs stock } i \text{ (fixed)} * \text{positie stock } i$$

$$\text{Als Positie stock } i > 0 \implies \text{Positie stock } i \geq \text{Minimale positiegrootte}$$

Two-Stage Model (2)

Uitgaande van stock return scenarios $n = 1, \dots, N$, schrijf i_n voor stock i in scenario n :

Second-stage constraints

Positie stock $i_n = \text{first-stage positie stock } i + \text{netto bijgekocht stock } i_n$

$$\sum_{i=1}^S \text{verkoop stock } i_n * \text{prijs stock } i_n = \sum_{i=1}^S \text{aankoop stock } i_n * \text{prijs stock } i_n$$

Aantal unieke stocks scenario $n = K$ (fixed)

Als $\text{Positie stock } i_n > 0 \implies \text{Positie stock } i_n \geq \text{Minimale positiegrootte}$

Evaluatie

$$\text{Return scenario } n (\%) = \frac{\text{portfoliowaarde scenario } n - \text{cash}}{\text{cash}}$$

$$\sum_{n=1}^N \text{probability scenario } n * \text{return scenario } n \geq \mu \text{ (fixed)}$$

Modeloplossingen (1)

'Naïeve' aanpak:

- Uitschrijven van model voor alle scenarios geeft groot linear model.
- Gebruik bestaande efficiënte oplosmethode.

Echter..

- Toevoeging cardinaliteitsrestrictie en minimale positiegrootte resulteert in integer restricties.
⇒ linear model → mixed-integer linear model: **NP-hard**.
- Bestaande efficiënte oplossingsalgoritmes niet direct toepasbaar op unieke structuur van multi-stage PSP model.
- Innovatieve benadering gevraagd.

Modeloplossingen (2)

De bestaande literatuur maakt gebruik van numerieke technieken om oplossingen te benaderen. Mijn input: gezien het kapitaal dat gemoeid is bij portfolio-allocaties, is het belang van **exacte oplossingen** te groot.

Twee opties:

- 1 Ondanks computationele inefficiëntie, gebruik maken van een MILP-oplosser om exacte oplossingen te verkrijgen.
- 2 Ontwikkel een innovatief oplossingsalgoritme dat specifiek toepasbaar is op dit type model en in staat is om exacte oplossingen te genereren.

Optie 1 toegepast voor resultaten; optie 2 ontwikkeld.

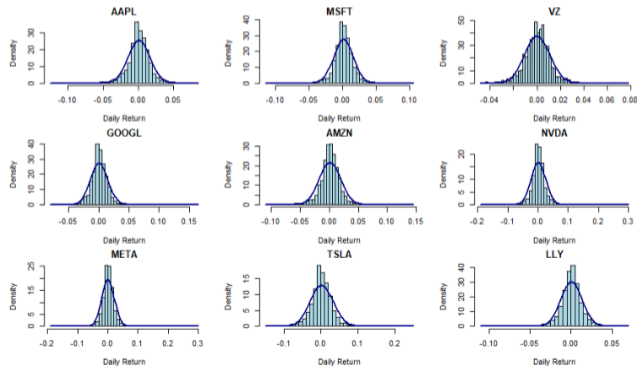
Scenarios

Stock Returns Modelleren (1)

Eigenschappen van stock return verdelingen:

- Univariaat: gecorreleerd; leptokurtisch (dunne piek, dikke staarten).
- Multivariaat: dynamische niet-lineaire kruis-correlaties; verschillende marginale verdelingen.

⇒ **Normaalverdeling niet toepasbaar!**



Stock Returns Modelleren (2)

Bestaande literatuur:

- Moment-matching scenario generatie
 - Momenten van historische verdeling matchen.
 - Geen convergentie bewijs van algoritme & efficiëntie sterk afhankelijk van startwaardes.
- Non-parametrische copula methode
 - Ingewikkeld om mee te werken.

⇒ **Parametrische copula methodiek.**

Copulas zijn multivariate cumulatieve distributiefuncties die:

- Het mogelijk maken om inter-afhankelijkheden tussen univariate data te modelleren, terwijl de marginale verdelingen afzonderlijk worden behouden.
- Niet-lineaire afhankelijkheden tussen variabelen kan vastleggen.

⇒ **Uitermate geschikt voor het modelleren van uni- en multivariate stock return verdelingen!**

Stock Returns Modelleren (3)

Parametrische copula methodiek:

- Schat Gaussian-, T-, Clayton- and Gumbel Copula op data.
- Beoordeel goodness-of-fit.
- Voer twee-zijdige Kolmogorov-Smirnov test uit:
 - Test H_0 : data komt van zelfde verdeling als originele data.

⇒ **Resulteert in best-fitting copula.**

Voordelen:

- Straightforward: makkelijk te implementeren.
- Parametrisch: makkelijk te interpreteren en mee te werken.

Portfolio Resultaten

Relevante basis parameters:

- CVaR level is 95%.
- Initiële cash positie is \$1,000,000.
- Minimale positiegrootte is 100.
- Even waarschijnlijke scenarios.
- Aantal unique stocks is 10.
- Tijd tussen stages is vastgesteld op één week.
- Benchmark index is Dow-Jones Index.

Benchmark Experiment (1)

Waarde van \$1 jaarlijks in DJI (rood) & $\mu = 0.1\%$ (blauw), $\mu = 0.2\%$ (groen), $\mu = 0.3\%$ (oranje), $\mu = 0.4\%$ (rood); two-stage model.

- Model portfolios volgen de DJI nauwkeurig of presteren beter dan de DJI.
- Model portfolios zijn stabiel.



Benchmark Experiment (2)

Return- & risico waarden benchmark experiment:

- Risico-efficiëntie significant verbeterd.
→ **Significante financiële implicaties.**
- Robust voor veranderingen in parameters.

	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 0.2\%$	DJI
Gem. wekelijkse return	0.38%	0.39%	0.40%
Dagelijkse 95% CVaR	-1.48%	-1.47%	-1.97%
Dagelijkse S.D.	0.65%	0.65%	0.79%

Scenario Kwaliteit

Empirische analyse om scenario kwaliteit te beoordelen: Copula vs. Monte-Carlo Sampling. Resultaten voor $\mu = 0.1\%$.

- Hogere return levels.
- Consistente verbetering in 95% CVaR.

⇒ **Copula methode verbetert risico-efficiëntie.**

	Copula	MC
Gem. wekelijkse return	0.38%	0.36%
Dagelijkse 95% CVaR	-1.48%	-1.63%
Dagelijkse s.d.	0.65%	0.68%

Resultaten Three-Stage Model

Toevoeging derde stage aan model (i.e. initiële aankoop, herbalanceren, herbalanceren):

- Gelijke return levels
- Consistente verbetering 95% CVaR

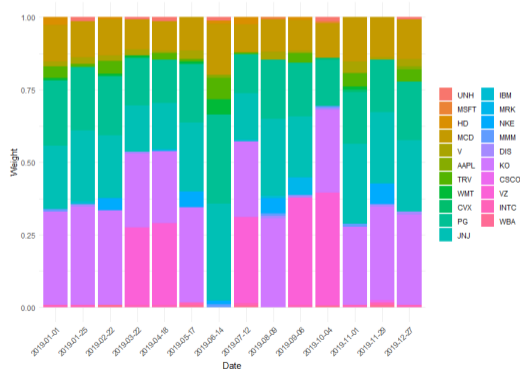
⇒ **Toevoeging van meer stages lijkt risk-efficiëntie nog verder te verbeteren.**

	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 0.2\%$	$\mu = 0.3\%$	$\mu = 0.4\%$
Dagelijkse 95% CVaR 2S	-1.48%	-1.47%	-1.53%	-1.83%
Dagelijkse 95% CVaR 3S	-1.47%	-1.44%	-1.47%	-1.82%

Impact Van Rolling Horizon

Portfolio compositie over tijd, $\mu = 0.2\%$, maandelijkse rolling-horizon:

- Benadering van een multi-stage SMIM (initiële aankoop, herbalanceren, herbalanceren,...)
- Evident: dynamische portfolio herbalancerings strategie heeft voorkeur.
- **Resultaat: risico-efficiëntie verder verbeterd.**



Conclusie

Belangrijkste bevindingen in deze studie:

- Multi-stage SMIM geïntroduceerd voor het PSP.
- Nieuwe oplosmethode geïntroduceerd voor dit type model.
- Adequate methodiek ontwikkeld om scenarios voor toekomstige stock returns te genereren.
- Multi-stage SMIM model voor het PSP produceert portfolios met significant verbeterde risico-efficiëntie waardes.

Bedankt!

Meer weten?

- LinkedIn: Lars Beute
- E-mail: larsbeute@hotmail.com