Prijsvraag

There is an ongoing discussion whether a pension system should be financed on a Pay-as-you-go basis or a funded basis. We explore this issue using the Diamond overlapping generations model with two generations. We assume the following. Lifetime income is given by w_t (earned in the active period) and the interest rate (i.e., return on capital) is constant and given by $r_t = 0{:}20$ (which is thus exogenously given for all periods). Individuals share their lifetime income over the two periods via optimizing their utility function:

$$U\,(c_{w,t}\,,\,c_{r,t+1}) = c_{w,t}^{1-\gamma} + \frac{1}{1+\theta}\,c_{r,t+1}^{1-\gamma}\,,$$

where $c_{w,t}$ and $c_{r,t+1}$ are consumption in the active period and the retirement period, respectively, $\theta = 0{:}15$ is the rate of time preference, and $\gamma = 0{:}50$ models the elasticity of intertemporal substitution.

a. Compute the optimal savings rate when the individual maximizes his/her utility under the appropriate budget constraint. Note that the optimal savings rate should be a numerical value.

Assume that the production function is given by $Y_t = (E_t N_t)^{0:3}\,K_t^{\,0:7}$, where K_t is the total amount of capital in the economy, N_t is the number of workers in the population and E_t models technological progress in human capital. Assume still that $r_t = 0{:}20$ for all periods t. Also assume that the population grows via $N_{t+1} = 1{:}05N_t$ for all t and that $E_{t+1} = 1{:}10E_t$ for all t. Let the optimal savings rate be as derived in the previous question. Define the normalized wage $\hat{w}_t^* / w_t^* \equiv E_t$ and the normalized capital per worker $\hat{k}_t^* \equiv k_t^* / E_t$.

b. Compute the equilibrium normalized wage $\hat{w}^*$ and the equilibrium normalized capital per worker $\hat{k}^*$ in the economy. Both should be numerical values.

c. Explain the Aaron condition in this model. Also explain how the Aaron condition can be helpful in the discussion whether a pension system should be financed on a Pay-as-you-go basis or a funded basis.

Oplossing vorige prijsvraag

Nadat de prijsvragen over Quantitative Finance en Risk Management in totaal tot slechts één goed antwoord hadden geleid, heeft de prijsvraag over schadeactuariaat een ware piek in respons teweeg gebracht. Er waren deze ronde maar liefst drie inzendingen die grotendeels goed waren. Een van de inzendingen blonk echter uit qua diepgaande kennis op het vakgebied.

De prijsvraag is namelijk gewonnen door professor Rob Kaas. Iedere actuaris in Nederland kent professor Kaas van het boek Modern Actuarial Risk Theory (Modern ART) dat in elk introductievak schadeactuariaat wordt gebruikt. En velen natuurlijk ook van zijn colleges aan de Universiteit van Amsterdam, waar hij sinds 1977 doceerde, onderzoek deed, en jarenlang de actuariële opleidingen bestierde. Professor Kaas is in 2015 met pensioen gegaan, maar heeft het actuariaat nog niet volledig vaarwel gezegd. Zo is hij nog altijd actief als editor voor het blad Insurance: Mathematics and Economics en bezoekt hij de bijbehorende academische congressen. Ook heeft hij de afgelopen jaren nog steeds hoorcolleges en computerpractica over risicotheorie en schadeactuariaat verzorgd aan de Universiteit van Amsterdam. Het bloed kruipt waar het niet gaan kan, zeker wanneer dit ons geliefde actuariaat betreft.

De prijsvraag is opgesteld door Marc Meertens. Marc is hoofd balansmanagement en herverzekeringen bij NN Life & Pensions. Hij is docent van het vak Actuarial Science in het schakelprogramma PrEMAS aan het Actuarieel Instituut, waarvoor hij het boek Modern ART gebruikt. Marc is gepromoveerd in de wiskunde op speltheorie, waarbij hij in zijn colleges graag de verbinding legt tussen de theorie en de praktijk. Zowel Marc als de redactie zijn vereerd om dit keer aan professor Kaas de prijsvraag te mogen uitreiken. We zijn erg benieuwd wie zijn opvolger gaat worden bij de volgende editie van de prijsvraag...

UITWERKING

Gelukkig had professor Kaas ergens nog het boek Modern ART liggen. Dit stelde hem in staat om moeiteloos de volgende antwoorden op de prijsvraag te produceren.

a) $\mathrm{E}[X] = 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.1 = 2$
$\mathrm{E}[X^2] = 0 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.2 + 36 \cdot 0.1 = 7$
$\mathrm{E}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X] = 5 \cdot 2 = 10$
$\mathrm{Var}[S] = \lambda\,\mathrm{E}[X^2] = 5 \cdot 7 = 35.$

b) $\mathrm{P}[S{=}0] = \exp(-\lambda\,\mathrm{P}[X{>}0]) = \exp(-3.5)$
$\mathrm{P}[S{=}1] = 0$
$\mathrm{P}[S{=}2] = 1/2 \cdot 4 \cdot \mathrm{P}[S{=}0] = 2{\cdot}\exp(-3.5)$
$\mathrm{P}[S{=}3] = 1/3 \cdot 3 \cdot \mathrm{P}[S{=}0] = \exp(-3.5)$
$\mathrm{P}[S{=}4] = 1/4 \cdot 4 \cdot \mathrm{P}[S{=}2] = 2{\cdot}\exp(-3.5).$

c) Er geldt voor Panjer-recursie dat $q_n = (a+b/n)q_{n-1}$ voor alle waarden van a en b die tot een kansverdeling leiden. Hieruit volgt:
$\mathrm{E}[N] = \Sigma_n\, n \cdot q_n = \Sigma_n\, n \cdot (a+b/n)q_{n-1} = \Sigma_n\, a \cdot (n-1) \cdot q_{n-1} + (a+b) \cdot \Sigma_n\, q_{n-1} = a \cdot \mathrm{E}[N] + (a+b)$.
Oftewel, $\mathrm{E}[N] = (a+b)/(1-a)$.

Rob Kaas

Marc Meertens