



Principale Componenten Copulas voor extreme financiële gebeurtenissen

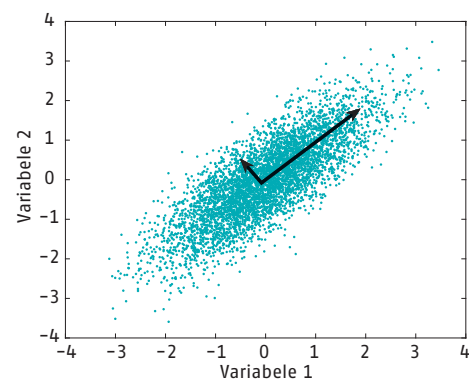
Het modelleren van extreme financiële gebeurtenissen is een belangrijke uitdaging voor een risicomanager. Gedurende een crash van de markt gaan typisch alle financiële indices tegelijk onderuit.

In dit artikel bespreken we een nieuwe combinatie van twee veelgebruikte technieken met als doel om extreme gebeurtenissen in financiële markten te modelleren. De twee gebruikte technieken zijn de copula en de Principale Componenten Analyse (PCA).

De sterke punten van deze technieken blijken elkaar aan te vullen. We noemen de onderzochte combinatie van technieken een Principale Componenten Copula (PCC). In dit artikel lichten we eerst beide technieken afzonderlijk toe, waarna we de gecombineerde techniek toepassen op aandelenindices. Hieruit blijkt dat de techniek geschikt is voor het modelleren van de samenhang tussen marktvariabelen in extreme scenario's. Dit is onder andere van belang voor een juiste vaststelling van het benodigd kapitaal.

PRINCIPALE COMPONENTEN ANALYSE

Principale Componenten Analyse is een multivariate techniek om te bepalen welke gezamenlijke richtingen het belangrijkst zijn in geobserveerde data. Dit wordt geïllustreerd in Figuur 1, waarin we een puntenwolk van gecorreleerde normale variabelen (Z_i) laten zien. Wiskundig gezien wordt PCA bereikt door de eigenvectoren van de correlatiematrix te bepalen en deze te ordenen op basis van de eigenwaarde. De vector met de hoogste eigenwaarde verklaart de meeste variantie (zie de langste pijl in Figuur 1). PCA wordt veel gebruikt als dimensie-reductietechniek door alleen de belangrijkste vectoren te behouden. In het algemeen kan PCA gezien worden als een lineaire transformatie waarbij de oorspronkelijke gecorreleerde variabelen (Z_i) worden herschreven in termen van ongecorreleerde componenten (P_j). Wanneer PCA wordt toegepast op financiële variabelen, dan geeft de eerste Principale Component (PC) de parallelle gezamenlijke marktbevinging weer. Gedurende een crash van de markt bewegen marktvariabelen tegelijkertijd in dezelfde richting. Daarom is PCA, en in het bijzonder de eerste Principale Component, zeer toepasbaar voor het modelleren van de samenhang tussen marktvariabelen tijdens extreme gebeurtenissen.



Figuur 1: illustratie van PCA

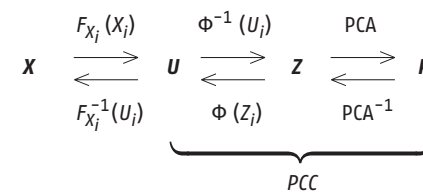
COPULAS

Een copula is een andere multivariate techniek die veelvuldig wordt toegepast in financiële en actuariële modellen. Het centrale idee is om de gezamenlijke verdelingsfunctie te ontbinden in de marginale verdelingsfuncties F_{X_i} van de individuele variabelen X_i en de copula C die het gezamenlijke gedrag beschrijft. Populaire copulas zijn de Gaussische copula, die dezelfde afhankelijkheid veronderstelt als de multivariate normale verdeling, en de t copula, die dezelfde afhankelijkheid veronderstelt als de multivariate t verdeling. Gedurende een crash van de markt bewegen marktvariabelen in

dezelfde richting, wat zogenaamde staartafhankelijkheid veroorzaakt. Een dergelijke staartafhankelijkheid kan niet met de Gaussische copula gemodelleerd worden, maar wel met de t copula. Dit is een veelgebruikt argument tegen het gebruik van de Gaussische copula in financiële modellen.

DE PRINCIPALE COMPONENTEN COPULA

De Principale Componenten Copula (PCC) beoogt de sterke punten van de twee besproken technieken, namelijk PCA en de copula, te combineren. Hiertoe wordt het modelleerschema van Figuur 2 gehanteerd. De eerste stap in het modelleerschema van Figuur 2 is het bepalen van de marginale verdelingsfuncties F_{X_i} voor de variabelen X_i . Dit is betrekkelijk eenvoudig en weinig data-intensief, omdat het steeds een eendimensionaal probleem betreft. Als deze stap is genomen, dan krijgen we uniforme marktvariabelen $U_i = F_{X_i}(X_i)$ met waarden tussen 0 en 1. De gezamenlijke verdelingsfunctie van deze uniforme variabelen heet een copula. De copula gaan we op een nieuwe manier bepalen. We zouden graag PCA willen toepassen, omdat deze techniek de belangrijkste gezamenlijke richtingen kan identificeren. Echter, PCA werkt niet goed voor uniforme variabelen. Daarom transformeren we eerst naar standaard normaal verdeelde marktvariabelen $Z_i = \Phi^{-1}(U_i)$.



Figuur 2: schematische weergave van de Principale Componenten Copula (PCC). De eerste stap past de marginale verdeling toe, de tweede stap past de standaard normale verdeling toe, de derde stap past PCA toe.

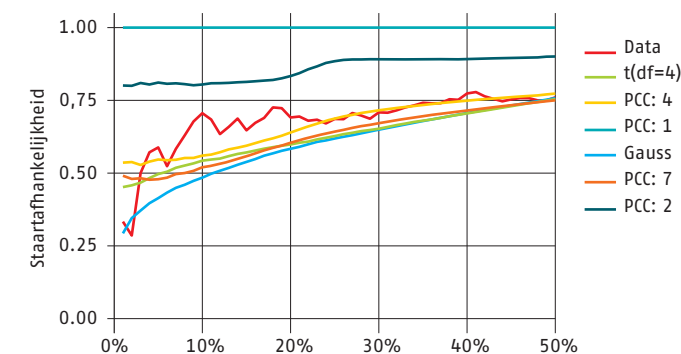
PCA werkt uitstekend voor genormaliseerde variabelen. Door de correlatiematrix van de genormaliseerde marktvariabelen (Z_i) te bepalen, kunnen we PCA toepassen. Als we de ongecorreleerde Principale Componenten (P_j) modelleren als onafhankelijk van elkaar, dan wordt het modelleerprobleem sterk vereenvoudigd. Immers, dan kunnen we de verdelingsfuncties F_{P_j} van de Principale Componenten afzonderlijk van elkaar bepalen. Als gevolg is nu elk onderdeel van het schema eenvoudig toe te passen, omdat er slechts univariate verdelingen of PCA benodigd zijn. De Principale Componenten (P_j) ontstaan uit een lineaire transformatie (een gewogen som) van genormaliseerde variabelen (Z_i). Dit betekent echter niet dat de Principale Componenten ook normaal verdeeld moeten zijn. Dit komt omdat de marktvariabelen (Z_i) afhankelijk van elkaar zijn. Andersom convergeert een gewogen som van onafhankelijke niet-normale variabelen (P_j) wel naar een normale verdeling (Z_i).¹ Aangezien de Principale Componenten (P_j) verschillende verdelingen kunnen hebben, is er een rijke familie aan copulas mogelijk met het modelleerschema. Alleen wanneer de Principale Componenten met een normale verdeling worden gemodelleerd, krijgen we een Gaussische copula.

TOEPASSING OP FINANCIËLE MARKTEN

Als toepassing hebben we de returns van verschillende belangrijke aandelenindices verspreid over de wereld bestudeerd (AEX, DAX, CAC40, FTSE100, S&P500, Nikkei 225 en Hang Seng). We gebruiken maandelijkse return data vanaf januari 1993 t/m juni 2021, oftewel 342 observaties. De historische observaties van de oorspronkelijke variabelen (X_i) transformeren we conform het modelleerschema naar genormaliseerde observaties (Z_i). Hierna passen we PCA toe. De eerste Principale Component (PC) beschrijft de parallelle schok in de returns van alle indices tegelijk. In crisistijd laat de eerste PC de sterkste bewegingen zien, omdat de returns van alle indices dan tegelijk sterk negatief zijn. We vinden dat de beweging van de Europese indices ten

opzichte van de Aziatische indices door de tweede PC wordt beschreven. Deze component kan daarmee een specifiek Aziatische of Europese crisis beschrijven. Bij het toepassen van onze techniek vinden we dat de verdeling voor de eerste PC scheef en dikstaartig kan zijn. Hiermee wordt een verhoogde kans op grote negatieve returns voor alle indices gemodelleerd. Dit genereert staartafhankelijkheid in het model. Deze conclusies zijn in lijn met het artikel van Oh en Patton, die de Factor Copula techniek hebben ontwikkeld [1]. Onze Principale Componenten Copula is technisch anders opgezet en eenvoudiger te schatten, maar modelleert dezelfde effecten.

In Figuur 3 laten we de resultaten voor de staartafhankelijkheid zien tussen de AEX en de S&P500. De horizontale as geeft het worst-case scenario met $\alpha\%$ kans weer voor een neerwaartse beweging van de AEX. De verticale as laat de kans zien dat de S&P500 het worst-case scenario met $\alpha\%$ kans overschrijdt, gegeven dat de AEX het worst-case scenario met $\alpha\%$ kans heeft overschreden. Een conditionele overschrijdingskans van 1 betekent dat de worst-case scenario's van de twee marktindices gezamenlijk plaatsvinden. Dit betekent perfecte staartafhankelijkheid. Figuur 3 laat zien dat de Gaussische copula het minste staartafhankelijkheid genereert, gevolgd door de t -copula met 4 vrijheidsgraden. We merken ook op dat de meest linker datapunten in Figuur 3 het minst betrouwbaar zijn, omdat er minder historische data in de staart beschikbaar is. Een belangrijke modelkeuze voor de Principale Componenten Copula is het aantal PC's dat wordt meegenomen. Een model met 1 PC heeft volledige staartafhankelijkheid, omdat alle indices parallel bewegen. Een model met 7 PC's levert in dit voorbeeld vergelijkbare resultaten op met de t -copula. Een model met 4 PC's zorgt voor een eenvoudiger model en is in staat om toch goede aansluiting met de data te behouden. Ook leidt een keuze voor minder PC's tot een hogere afhankelijkheid in de staart.



Figuur 3: staartafhankelijkheid (conditionele gezamenlijke overschrijdingskans) voor verschillende copulas vergeleken met data.

CONCLUSIE

We hebben een techniek beschreven die de positieve eigenschappen van een copula en PCA combineert. We hebben met een voorbeeld laten zien dat deze techniek veel flexibiliteit geeft bij het modelleren van staartafhankelijkheid, wat belangrijk is voor het beschrijven van financiële crises. Het toepassen van de techniek is eenvoudig, omdat er alleen univariate verdelingen geschat hoeven te worden in combinatie met het toepassen van PCA. We hopen dat de Principale Componenten Copula van nut kan zijn in verschillende modelleertoeepassingen. ■

Referentie

[1] D.H. Oh and A.J. Patton (2017), Modeling Dependence in High Dimensions With Factor Copulas, *Journal of Business & Economic Statistics*, 35, 139–154

1 – Wanneer deze convergentie niet wordt bereikt, dan kan de transformatie van Z_i naar U_i ook niet-parametrisch gedaan worden middels een rangtransformatie.

